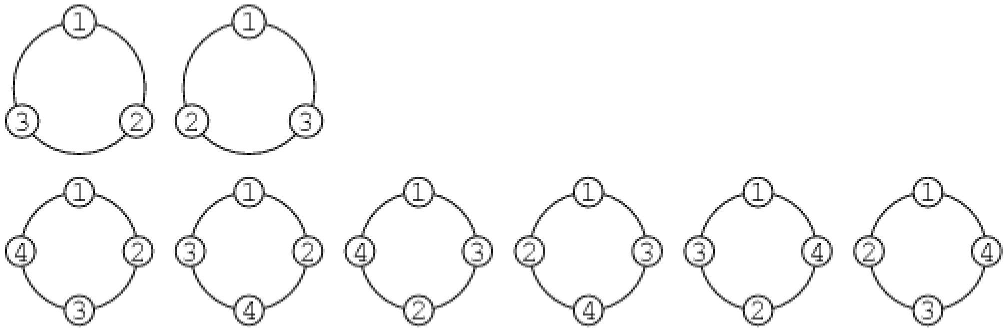
Circular Permutation

The number of ways to arrange n distinct objects along a fixed (i.e., cannot be picked up out of the plane and turned over) circle is

$$P_n = (n-1)!$$

The number is $(\mathrm{n}-1)!$ instead of the usual factorial $\mathrm{n}!$ since all cyclic permutations of objects are equivalent because the circle can be rotated.

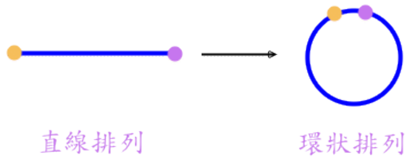


For example, of the $3! = 6$ permutations of three objects, the $(3-1)! = 2$ distinct **circular permutations** are {1,2,3} and {1,3,2}. Similarly, of the 4!=24 permutations of four objects, the (4-1)!=6 distinct **circular permutations** are {1,2,3,4}, {1,2,4,3}, {1,3,2,4}, {1,3,4,2}, {1,4,2,3}, and {1,4,3,2}.

Reference Video:
Permutations and Combinations – Circular Arrangement
https://www.youtube.com/watch?v=gxeP3PeA09I

環狀排列

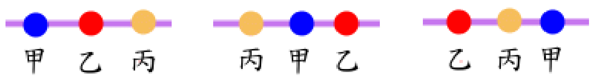
若將直線排列的首尾相接,變成一個圜, 稱之為"環狀"， 如下圖:



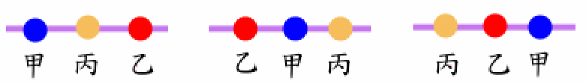
環狀排列: 又稱圓排列，是將事物沿著一圓周來作排列，只考慮事物的相對位置，而不計較各物件所在的實際位置。**此排列可旋轉，但不可翻轉。**底下先看一個問題:

甲乙丙三人圍一圓桌而坐，共有幾種坐法?

解這個問題，我們先考慮甲乙丙三人做直線排列的狀況:

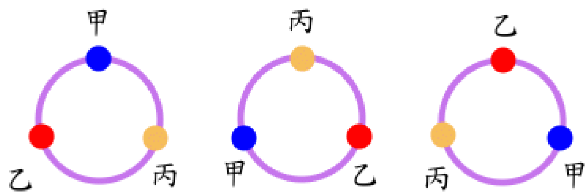


(圖 1)



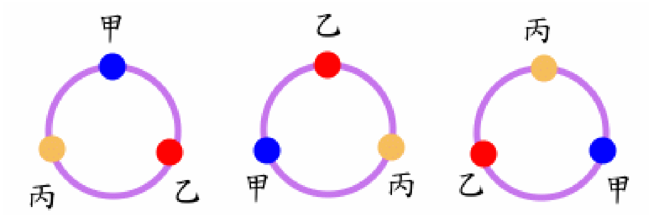
(圖 2)

共計 6 種情形。若將(圖 1)的直線排列首尾相接，成為一圈，如(圖 3)



(圖 3)

我們可以發現(圖 3)的中間與右邊兩圓，都是左邊的圓逆時針旋轉的結果，所以應屬於同一類。同理，若將(圖 2)的直線排列首尾相接，成為一圓，如(圖 4) ，也可發現此三個也屬於同一類。



故共有 $\mathbf{3!\div 3=(3-1)!=2}$ 種排列方式。

所以若 n 個不同事物在做環狀排列時，先求其直線排列，因每 n 個排列方式中，在環狀排列均視為同一種。故環狀排列數為 **直線排列數/排列之個數**。底下我們給出**『環狀排列』的公式**：

$\boldsymbol{n}$ 個不同物件的環狀排列數為 $(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!$ 。